

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE
L'INFORMATIQUE

IDEAUX FLOUS DANS UN ANNEAU
" FUZZY IDEAL ON A RING "

HABIBA BAHACHE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ CONFORMÉMENT AUX
EXIGENCE DE DEGRÉ DE
MASTER EN MATHÉMATIQUES
ANNÉE ACADÉMIQUE 2018-2019

Président : Prof. Abdelaziz AMROUNE
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
Université de M'sila-Algérie

Rapporteur : Dr. Soheyb MILLES
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
Université de M'sila-Algérie

Examineur : Prof. Lemnaouar ZEDAM
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
Université de M'sila-Algérie

Habiba Bahache

IDEAUX FLOUS DANS UN ANNEAU

Mémoire présenté conformément aux exigences de degré de

Master en Mathématiques

Année Académique 2018-2019

Idéaux flous dans un anneau

Habiba *Bahache*

Remerciements

- Avant tout, nous remercions ALLAH le tout Puissant de nous avoir accordé la force et les moyens afin de pouvoir accomplir ce mémoire.

- Nous exprimons nos vifs remerciements, nos profondes gratitude et nos reconnaissances pour notre encadreur le Docteur Soheyb MILLES, qui a dirigé ce mémoire. Sa bonté et sa confiance nous ont permis de progresser régulièrement. Nous tenons à le remercier pour ses conseils avisés ses valeurs uniques ainsi que sa patience avec laquelle il a accompagné notre travail.

- Nous tenon à remercier le professeur Abdelaziz AMROUNE qui est aidé à réaliser ce travail et pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.

- Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur monsieur professeur Lemnaouar ZEDAM. Nous espérons surtout qu'ils ont éprouvé du plaisir à lire ce travail.

- Nos remerciements vont également à tous les enseignants de Département mathématiques et informatiques.

- Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à mon chers parents à qui depuis de si longues années, m'ont encouragé et soutenu dans la poursuite de mes études.

- Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues.

- Et enfin nous voulons remercier tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin dans l'élaboration et la finalisation de ce travail.

M'sila, Juillet 2019

Habiba Bahache

Table des matières

Introduction	4
1 Les ensembles flous	6
1.1 Généralités sur les ensembles classiques	6
1.1.1 Rappels sur les ensembles classiques	6
1.1.2 Opérations sur les ensembles classiques	7
1.2 Concepts fondamentaux des ensembles flous	8
1.2.1 Sous-ensemble flou	8
1.2.2 Opérations sur les sous-ensembles flous	9
1.2.3 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou	11
1.3 Représentation d'un sous-ensemble flou a partir des sous-ensembles classiques . .	12
1.3.1 Les α -coupes associées à un ensemble flou	13
1.3.2 Représentation d'un sous-ensemble flou a partir de ses α -coupes	14
1.4 L'image directe et l'image réciproque d'un sous ensemble flou	16
2 Idéaux flous dans un anneau	17
2.1 Généralités sur les anneaux et sur les idéaux	17
2.1.1 Anneaux	17
2.1.2 Idéal dans un anneau	18
2.2 Idéaux flous dans un anneau	19
2.2.1 Propriétés des idéaux flous dans un anneau	20
2.2.2 Caractérisations des idéaux flous dans un anneau	23
2.3 Idéal premier flou dans un anneau : Définitions	24
2.3.1 Propriétés des idéaux premiers flous dans un anneau	24

2.3.2	Caractérisations des idéaux premiers flous dans un anneau	27
-------	---	----

Bibliographie		29
----------------------	--	-----------

Introduction

Le concept de l'ensemble flou a été introduit par le professeur Zadeh [17] de l'université de Berkeley à Californie en 1965 dans son article "Fuzzy sets" comme une généralisation de la notion de l'ensemble classique, puis cette théorie a été développée par de nombreux auteurs [9, 10, 19].

Les domaines d'applications de la théorie des ensembles flous sont très nombreux, on la retrouve en automatique, pour faire du commande et du régulation floue, en robotique, pour faire la planification de trajectoire, en traitement d'image, pour atténuer le bruit d'une image, pour faire de l'interpolation...etc.

Les notions des anneaux flous et les idéaux flous dans un anneau qui sont des sous-ensembles flous ce n'est qu'une partie de la logique flou et ont été introduit par Mukherjee et Sen [12] et a été développé par Wang [15]. En 1990 Malik et Mordeson [8] ont introduit la notion d'un idéal premier flou dans un anneau. Swamy et ses collègues [14] ont étudié quelques propriétés des idéaux premiers flous dans un anneau, aussi Azam et ses collègues [2] ont introduit la notion d'un anti-idéal flou dans un anneau. Récemment, et dans le même sens, Alam [1] a étudié et introduit quelques opérateurs sur les anti-anneaux et idéaux flous.

Le but de ce mémoire est d'étudier quelques propriétés des idéaux flous (resp. idéaux premiers flous) dans un anneau, notamment la stabilité par l'intersection des idéaux flous (resp. idéaux premiers flous), l'image directe et l'image réciproque d'un idéal flou (resp. idéal premier flou). Aussi, la caractérisation en terme de support et en terme de ses α -coupes.

Le mémoire est subdivisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre nous donnons les concepts fondamentales de la théorie des sous-ensembles flous; sa position par rapport à la théorie des ensembles classique, les propriétés fondamentales des ensembles flous et les règles de calculs algébriques, les α -coupes, l'image directe et l'image réciproque d'un sous-ensemble flou.

Dans le deuxième chapitre, on étudier les idéaux flous dans un anneau. D'abord, nous rappelons quelques généralités sur les anneaux et les idéaux dans le cas classique, ensuite on étudier les notions des anneaux et les idéaux flous dans un anneau, notamment quelques propriétés de base pour les idéaux flous et les idéaux premiers flous dans un anneau. Aussi, nous caractérisons ses notions en terme de support et en terme de ses α -coupes.

Chapitre 1

Les ensembles flous

Comparativement à la logique classique, les bases théoriques de la logique floue sont établies de manière à pouvoir traiter des variables inexactes de valeurs compris entre 0 et 1 et elle repose aussi sur la théorie des ensembles flous, par contre la logique classique dont les variables ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, la notion d'appartenance à un ensemble flou est graduelle, c'est à dire q'un élément peut appartenir, plus au moins fortement à cet ensemble.

Dans ce chapitre, nous donnons des notions de base d'un sous-ensemble flou, et on donne aussi quelques propriétés fondamentales de cet ensemble telle que les caractéristiques, les opérations et les α -coupes du sous-ensemble flou. Pour plus de détaille voir [10], [9] et [17].

1.1 Généralités sur les ensembles classiques

Dans cette section, on donne un rappelle sur l'ensemble classique, l'ensemble flou et quelques exemples d'illustrations. Pour un langage mathématique acceptable, nous utilisons indifféremment le terme sous-ensemble flou et ensemble flou.

1.1.1 Rappels sur les ensembles classiques

Un ensemble A de référence X est une collection d'objets, cet ensemble peut être défini par :

- (i) L'écriture de tous ses éléments, dont les éléments sont a_1, a_2, \dots, a_n , et on écrit, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$;

- (ii) Une propriété ou des propriétés sont satisfaits par ses éléments, et on écrit, $A = \{x \mid P(x)\}$, où le symbole " \mid " désigne la phrase " x telle que $P(x)$ " et $P(x)$ une proposition de la forme " x a une propriété P ";
- (iii) Une fonction dite fonction caractéristique χ_A qui prend la valeur 0 pour les éléments n'appartient pas à A et la valeur 1 pour ceux qui appartient à A :

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A; \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Exemple 1.1. Soit X un ensemble des pays du monde, on peut définir les ensembles classiques A_1, A_2 par :

A_1 : les pays d'Europe, contenant les éléments bien connus de la CEE;

$A_2 = \{\text{Algérie, Maroc, Syrie, Egypte, Tunisie, Libye}\}$.

1.1.2 Opérations sur les ensembles classiques

Soient A et B deux sous-ensembles de référence X .

- **L'inclusion** : $A \subset B$ si et seulement si $\forall x \in X, (x \in A) \implies (x \in B)$ (c-à-d, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$).
- **L'égalité** : $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ (c-à-d, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$).
- **Le complément** : $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$ c-à-d, $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$.
- **L'intersection** : $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ c-à-d, $\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$.
On a $A \cap A^c = \emptyset$ est appelé lois de non contradiction.
- **L'union** : $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ c-à-d, $\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$.
On a $A \cup A^c = X$ est appelé lois de tiers exclu.

Exemple 1.2. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, et soient A et B deux sous-ensembles flous de X donnée par :

$$A = \{\langle 1, 0.3 \rangle, \langle 2, 0.4 \rangle, \langle 3, 0.5 \rangle, \langle 4, 0.6 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\};$$

$$B = \{\langle 1, 0.5 \rangle, \langle 2, 0.6 \rangle, \langle 3, 0.7 \rangle, \langle 4, 0.8 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}.$$

Ce qui donne

$$A \cap B = \{\langle 1, 0.3 \rangle, \langle 2, 0.4 \rangle, \langle 3, 0.5 \rangle, \langle 4, 0.6 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\},$$

$$A \cup B = \{\langle 1, 0.5 \rangle, \langle 2, 0.6 \rangle, \langle 3, 0.7 \rangle, \langle 4, 0.8 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\},$$

$$A^c = \{\langle 1, 0.7 \rangle, \langle 2, 0.6 \rangle, \langle 3, 0.5 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 0.2 \rangle\},$$

$$B^c = \{\langle 1, 0.5 \rangle, \langle 2, 0.4 \rangle, \langle 3, 0.3 \rangle, \langle 4, 0.2 \rangle, \langle 5, 0 \rangle\}.$$

1.2 Concepts fondamentaux des ensembles flous

Dans cette section, nous donnons les notions de base d'un sous-ensemble flou comme les opérations, les caractéristiques d'un sous-ensemble flou, les α -coupes, produit cartésien et projection des sous-ensembles flous.

1.2.1 Sous-ensemble flou

On va aborder la définition de sous- ensemble flou introduit par L. Zadeh [17] et quelques exemples qui le exprimer.

Définition 1.1. (*Sous-ensemble flou*)[17] Soit X un ensemble de référence, un sous-ensemble flou A (EF) de X est l'ensemble des couples

$$\{\langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in X\}.$$

Avec μ_A est une fonction d'appartenance de X dans $[0, 1]$ et $\mu_A(x)$ représente le degré d'appartenance de x dans A .

On note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble qui contient tous les sous-ensembles flous de X .

Exemple 1.3. (*Cas fini*) Soient $X = [6, 8]$ et A désigne l'ensemble des nombres réels proche à 7 sa fonction d'appartenance $\mu_A(x) = A(x) = \frac{1}{1-(x-7)^2}$, donc A est un sous-ensemble flou de X (voir la **Figure 1.1**).

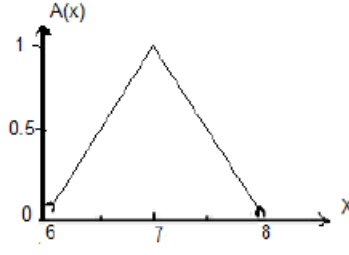


FIGURE 1.1

Exemple 1.4. (Cas infini) Soit $X = [a, b]$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$, et soit A le sous-ensemble flou de X définie par :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \\ 1 & \text{si } a < x < b, \\ 1 + \frac{x-a}{\alpha} & \text{si } a - \alpha < x < a, \\ 1 - \frac{b-x}{\beta} & \text{si } b < x < b + \beta. \end{cases}$$

1.2.2 Opérations sur les sous-ensembles flous

Comme dans la théorie des ensembles classique, en théorie des ensembles flous, il existe un certain nombre d'opérations, on étend ces opérations aux fonctions d'appartenance des ensembles flous par quelques opérateurs comme, min, max, ... pour plus de détail voir [10], [19].

Pour deux sous-ensembles flous A et B de $\mathcal{F}(X)$ on a

- **Inclusion** on dit que A est inclus dans B , qu'on note alors $A \subset B$, si tout élément x de X qui appartient à A appartient aussi à B avec un degré au moins aussi grand (i.e, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$).
- **Égalité** on dit que deux sous-ensembles flous A et B sont égaux, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout élément x de X (i.e, $\mu_A(x) = \mu_B(x)$).
- **Intersection** de deux sous-ensembles flous A et B est l'ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus petit des degrés avec lesquels ils appartiennent à A et B , pour tout élément x de X on a $A \cap B$ est donné par $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.
- **Union** de deux sous-ensembles flous A et B est l'ensemble flou constitué des éléments de

X affectés du plus grand des degrés avec lesquels ils appartiennent à A et B , pour tout élément x de X on a $A \cup B$ est donné par $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

- **Complément** d'un ensemble flou A noté A^c est le sous-ensemble flou constitué des éléments x lui appartenant d'autant plus à A^c qu'ils appartiennent peu à A , pour tout élément x de X on a A^c est donné par $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Exemple 1.5. (Cas fini) Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, et soient A et B deux sous-ensemble flous de X donnée par :

$$A = \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.3 \rangle, \langle 3, 0.5 \rangle, \langle 4, 0.5 \rangle, \langle 5, 0.9 \rangle\} ;$$

$$B = \{\langle 1, 0.6 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.8 \rangle, \langle 4, 0.9 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}.$$

Ce qui donne

$$A \cap B = \{\langle 1, 0.2 \rangle, \langle 2, 0.3 \rangle, \langle 3, 0.5 \rangle, \langle 4, 0.5 \rangle, \langle 5, 0.9 \rangle\},$$

$$A \cup B = \{\langle 1, 0.6 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.8 \rangle, \langle 4, 0.9 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\},$$

$$A^c = \{\langle 1, 0.8 \rangle, \langle 2, 0.7 \rangle, \langle 3, 0.5 \rangle, \langle 4, 0.5 \rangle, \langle 5, 0.1 \rangle\},$$

$$B^c = \{\langle 1, 0.4 \rangle, \langle 2, 0.2 \rangle, \langle 3, 0.2 \rangle, \langle 4, 0.1 \rangle, \langle 5, 0 \rangle\}.$$

Exemple 1.6. (Cas infini) Soit $X = \mathbb{R}$ et soient A l'ensemble des réels plus grand que 10 et B l'ensemble des réels proche à 11 sont caractérisés respectivement par ses fonctions d'appartenances

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10, \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

et

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 11, \\ (1 + (x - 11)^4)^{-1} & \text{si } x > 11. \end{cases}$$

Donc, on obtient $A \cap B$ l'ensemble des réels plus grand que 10 et proche de 11 donné par sa fonction d'appartenance

$$\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 10, \\ \min[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}] & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

Et $A \cup B$ l'ensemble des réels plus grand que 10 ou proche de 11 donné par sa fonction d'appartenance

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}], \quad x \in X.$$

Proposition 1.1. (*Propriétés fondamentales des opérations*)[10] Soit $A, B, C \in F(X)$, on a les propriétés suivantes

<i>Commutativité</i>	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
<i>Associativité</i>	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
<i>Idempotente</i>	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
<i>Distributivité</i>	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
<i>Lois de De Morgan</i>	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
<i>Loi de non contradiction</i> (non valide)	$A \cap A^c \neq \emptyset$
<i>Loi de tiers exclu</i> (non valide)	$A \cup A^c \neq X$

1.2.3 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Les caractéristiques d'un sous-ensemble flou A de référence X les plus utiles pour les décrire sont celles qui montrent à quel point il diffère d'un sous-ensemble classique de X .

Définition 1.2. (*Support d'un sous-ensemble flou*)[5] Le support de A , noté $Supp(A)$, est la partie de X sur laquelle la fonction de A n'est pas nulle

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Définition 1.3. (*Noyau d'un sous-ensemble flou*)[5] Le noyau de A , noté $Noy(A)$, est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de A vaut 1

$$Noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

Définition 1.4. (*Hauteur d'un sous-ensemble flou*)[5] La hauteur de A notée $H(A)$, est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance

$$H(A) = \sup_{x \in X} (\mu_A(x)).$$

Définition 1.5. Le sous-ensemble flou A de X est normalisé si sa hauteur $H(A)$ est égale à 1.

Définition 1.6. (*Cardinalité d'un sous-ensemble flou*)[5] La cardinalité du sous ensemble flou A de X , notée $|A|$, lorsque X est fini, est définie par

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x).$$

Exemple 1.7. (*Cas fini*) Soit $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, et soit le sous ensemble flou A est donnée par :

$$A = \{\langle a, 0.6 \rangle, \langle b, 0.7 \rangle, \langle c, 0.4 \rangle, \langle d, 0.3 \rangle, \langle e, 0.8 \rangle, \langle f, 0.5 \rangle, \langle g, 0.5 \rangle\}.$$

Alors $\text{Supp}(A) = X$, $H(A) = 0.8$, $\text{Noy}(A) = \emptyset$ et $|A| = 3.3$.

Exemple 1.8. (*Cas infini*) Soit $X = [a, b]$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$, et soit A le sous-ensemble flou de X alors :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \\ 1 & \text{si } a < x < b, \\ 1 + \frac{x-a}{\alpha} & \text{si } a - \alpha < x < a, \\ 1 - \frac{b-x}{\beta} & \text{si } b < x < b + \beta. \end{cases}$$

$\text{Supp}(A) = [a - \alpha, b + \beta]$, $H(A) = 1$, $\text{Noy}(A) = [a, b]$ et $|A|$ est infini.

1.3 Représentation d'un sous-ensemble flou à partir des sous-ensembles classiques

En présence de connaissances imprécises représentées par les sous-ensembles, plusieurs raisons conduisent à rechercher les sous-ensembles ordinaires qui leur sont associés.

1.3.1 Les α -coupes associées à un ensemble flou

Le α -coupe d'un ensemble flou A est un ensemble classique telle que ses éléments appartient à l'ensemble flou A avec un degré au moins égal à α , c'est le passage le très important entre le cas classique et le cas flou car, elle est assurée la validité des notions classiques en termes flous.

Définition 1.7. (Le niveau de flou)[5] Pour un seuil α dans $[0, 1]$, on définit le α -coupe du sous-ensemble flou A de X (ou sous-ensemble de niveau α associé à A) comme le sous-ensemble

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Dont la fonction caractéristique χ_{A_α} est telle que : $\chi_{A_\alpha}(x) = 1$ si et seulement si $\mu_A(x) \geq \alpha$.

Proposition 1.2. [5] Soient A et B deux ensembles flous. Alors

$$(1) (A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha;$$

$$(2) (A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha;$$

$$(3) A \subset B \implies A_\alpha \subset B_\alpha;$$

$$(4) A_1 = \text{Noy}(A);$$

$$(5) A_0 = X.$$

Exemple 1.9. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et soient A et B deux sous-ensembles flous de X telle que

$$A = \{\langle 1, 0.6 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.8 \rangle, \langle 4, 0.1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\};$$

$$B = \{\langle 1, 0.3 \rangle, \langle 2, 0.6 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\}.$$

Alors

$$A \cup B = \{\langle 1, 0.6 \rangle, \langle 2, 0.8 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\};$$

$$A \cap B = \{\langle 1, 0.3 \rangle, \langle 2, 0.6 \rangle, \langle 3, 0.8 \rangle, \langle 4, 0.1 \rangle, \langle 5, 0.8 \rangle\}.$$

Donc on obtient

$$A_{0.4} = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.4\} = \{1, 2, 3, 5\};$$

$$B_{0.4} = \{x \in X / \mu_B(x) \geq 0.4\} = \{2, 3, 4, 5\}.$$

On obtient aussi

$$\begin{aligned}
(A \cup B)_{0.4} &= \{x \in X / \mu_{A \cup B}(x) \geq 0.4\} \\
&= A_{0.4} \cup B_{0.4} \\
&= \{1, 2, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \\
(A \cap B)_{0.4} &= \{x \in X / \mu_{A \cap B}(x) \geq 0.4\} \\
&= A_{0.4} \cap B_{0.4} \\
&= \{1, 2, 3, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 5\}.
\end{aligned}$$

Définition 1.8. (*Le niveau strict de flou*)[5] Pour tout niveau α de $[0, 1]$, on définit la α -coupe strict du sous-ensemble flou A comme le sous-ensemble

$$A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Remarque 1.1.

- (1) Les niveaux stricts de flous ont les mêmes propriétés que les niveaux de flous ;
- (2) Si $\alpha = 0$, le 0-coupe strict d'un sous-ensemble flou A coïncide à la définition d'un support c-à-d

$$A^0 = \text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\},$$

- (3) $\text{Supp}(A) = A^0 \subseteq A_0$.

1.3.2 Représentation d'un sous-ensemble flou a partir de ses α -coupes

La suite de toutes les α -coupes d'un sous-ensemble flou A le représente complètement. de façon imagée, on peut dire qu'il est "coupé en tranches" et qu'en possédant toutes les tranches, on en possède toute la substance. Plus généralement, il est équivalent de connaître la famille de toutes les α -coupes d'un sous-ensemble flou ou de connaître le sous-ensemble flou lui-même.

Théorème 1.1. (*Théorème de décomposition*)[5] Tout sous-ensemble flou A de l'ensemble de référence X est défini à partir de ses α -coupes pour tout élément x de X :

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)).$$

Démonstration Soit $x \in X$, on suppose que $\mu_A(x) = \beta$ ($\beta \in [0, 1]$) et $x \in A$. Donc $\mu_A(x) = \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x)$. Alors on obtient $\mu_A(x) \leq \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x))$. Réciproquement, soit $x \in X$ pour tout niveau β on a

$$\begin{cases} \chi_{A_\beta}(x) = 1 & \text{si } \mu_A(x) \geq \beta, \\ \chi_{A_\beta}(x) = 0 & \text{si } \mu_A(x) < \beta. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = \beta & \text{si } \mu_A(x) \geq \beta, \\ \beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) = 0 & \text{si } \mu_A(x) < \beta. \end{cases}$$

Dans les deux cas on obtient, $\beta \cdot \chi_{A_\beta}(x) \leq \mu_A(x)$. Ce qui implique que $\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)) \leq \mu_A(x)$.

Par conséquent, pour tout $x \in X$: $\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x))$.

Exemple 1.10. Soit X l'ensemble de référence qui est défini dans l'**Exemple 1.5** et soit A le sous-ensemble flou « type grand d'une maison », donné par :

$$A = \{\langle 3, 0.3 \rangle, \langle 4, 0.5 \rangle, \langle 5, 0.6 \rangle, \langle 6, 0.9 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 8, 1 \rangle\}.$$

On a pour tout niveau α dans $[0, 1]$

$$A_1 = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 1\} = \{7, 8\};$$

$$A_{0.8} = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.8\} = \{6, 7, 8\};$$

$$A_{0.2} = \{x \in X / \mu_A(x) \geq 0.2\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

On obtient donc

$$\mu_A(3) = \max(1 \times 0, \dots, 0.3 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.3;$$

$$\mu_A(4) = \max(1 \times 0, \dots, 0.5 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.5;$$

$$\mu_A(5) = \max(1 \times 0, \dots, 0.6 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.6;$$

$$\mu_A(6) = \max(1 \times 0, \dots, 0.9 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 0.9;$$

$$\mu_A(7) = \max(1 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 1;$$

$$\mu_A(8) = \max(1 \times 1, \dots, 0 \times 1) = 1.$$

Ce qui fournit bien l'ensemble A .

1.4 L'image directe et l'image réciproque d'un sous ensemble flou

Dans cette section, on étudier l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble flou.

Définition 1.9 (Image directe). [16] Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction.

Pour un ensemble flou A dans X , $f[A]$ est un ensemble flou dans Y , la fonction d'adhésion est donnée par

$$f[A](y) = \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}[y]} \{A(z)\} & \text{si } f^{-1}[y] \text{ est non vide ;} \\ 0 & \text{si } f^{-1}[y] \text{ est vide.} \end{cases}$$

Pour tout $y \in Y$.

Définition 1.10 (Image réciproque). [16] Soit f une fonction de X à Y , l'image réciproque d'un ensemble flou B de Y est écrite comme $f^{-1}(B)$, est un ensemble flou dans X , la fonction d'adhésion est définie par : $f^{-1}[B](x) = B(f(x))$, pour tout $x \in X$.

Ou bien $f^{-1}(B) = \{\langle x, f^{-1}[B](x) \rangle, x \in X\}$, avec $f^{-1}[B](x) = B[f(x)]$.

Exemple 1.11. Soit $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e, g\}$. Soit A , B deux ensembles flous dans X et Y respectivement.

$A = \{\langle a, 0.5 \rangle; \langle b, 0.3 \rangle; \langle c, 0.9 \rangle\}$, $B = \{\langle d, 0.2 \rangle; \langle e, 0.7 \rangle; \langle g, 0.11 \rangle\}$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ est un fonction définie par $f(a) = d$, $f(b) = d$ et $f(c) = e$, alors

(1) Pour $f^{-1}(d) = \{a, b\} \neq \Phi$. Alors,

$$f[A](d) = \sup\{A(x) : x \in f^{-1}(d)\} = \sup\{A(a), A(b)\} = \sup\{0.5, 0.3\} = 0.5.$$

Pour $f^{-1}(e) = \{c\} \neq \Phi$. Alors,

$$f[A](e) = \sup\{A(x) : x \in f^{-1}(e)\} = \sup\{A(c)\} = 0.9.$$

Pour $f^{-1}(g) = \Phi$, alors : $f[A](g) = 0$ donc, $f[A] = \{(d, 0.5), (e, 0.9), (g, 0)\}$.

(2) Pour $f^{-1}[B](a) = B(f(a)) = B(d) = 0.2$.

$$f^{-1}[B](b) = B(f(b)) = B(d) = 0.2.$$

$$f^{-1}[B](c) = B(f(c)) = B(e) = 0.7. \text{ Donc, } f^{-1}[B] = \{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.7)\}.$$

Chapitre 2

Idéaux flous dans un anneau

Parmi les notions flous les plus importants du point de vue d'applications qu'ils peuvent avoir sont les anneaux flous et les idéaux flous dans un anneau. Dans ce chapitre, on va étudier la notion d'un idéal flou dans un anneau, comme une généralisation de la notion d'idéal classique dans un anneau avec quelques propriétés et caractérisations fondamentales.

2.1 Généralités sur les anneaux et sur les idéaux

On s'intéresse dans cette section les définitions d'un anneau et d'un idéal dans un anneau dans le cas classique.

2.1.1 Anneaux

Définition 2.1. (*Anneau*). Soit A un ensemble muni de deux lois de composition, $*$ et \perp .

On dit que $(A, *, \perp)$ est un anneau si :

- (1) $(A, *)$ est un groupe commutatif;
- (2) la loi $*$ est associative;
- (3) la loi \perp distributive par rapport à la loi $*$.

Remarque 2.1.

- (1) Si \perp est commutative, on dit que $(A, *, \perp)$ est un anneau commutatif.
- (2) Si \perp admet un élément neutre, on dit que $(A, *, \perp)$ est un anneau unitaire.

Exemple 2.1. (1) $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.

(2) Soit E un ensemble, $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

(3) Soit A l'ensemble des applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$.

$(A, +, \circ)$ est un anneau non commutatif.

Définition 2.2. (Sous-anneau). Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et soit B une partie de A . On dit que B est un **sous-anneau** de $(A, +, \cdot)$ si et seulement si :

(1) $B \neq \emptyset$ ($0_A \in B$) ;

(2) $(B, +)$ est un sous-groupe de A ;

(3) B stable pour la loi " \cdot ".

Ce qui équivaut à

(1) $0_A \in B$;

(2) $\forall a, b \in B, a - b \in B$;

(3) $\forall a, b \in B, a \cdot b \in B$.

Exemple 2.2. (1) $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$, chacun est un sous-anneau du suivant ;

(2) l'ensemble, $\{r + s\sqrt{2}, (r, s) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Définition 2.3. (Homomorphisme d'anneaux). Soient $(A, +, \cdot)$ et $(B, +, \cdot)$ deux anneaux. On dit qu'une application f de A vers B est un **homomorphisme** (ou **morphisme**) si :

(1) $f(1_A) = 1_B$;

(2) $\forall a, b \in A, f(a + b) = f(a) + f(b)$;

(3) $\forall a, b \in A, f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Remarque 2.2. En particulier, f est un homomorphisme de groupe, de $(A, +)$ vers $(A, +)$.

2.1.2 Idéal dans un anneau

Définition 2.4. (Idéal). Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Une partie I non vide de A est dite un **idéal** de A si et seulement si :

(1) I est un sous-groupe de $(A, +, \cdot)$;

(2) pour $x \in I$ et $a \in A$ on a : $x \cdot a \in I$ et $a \cdot x \in I$.

Exemple 2.3. L'ensemble \mathbb{Z} n'est pas un idéal de $(\mathbb{R}, +, \times)$, car $\frac{1}{5} \in \mathbb{R}$ et $3 \in \mathbb{Z}$ alors que $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Remarque 2.3. Il est facile de vérifier que

- (1) L'intersection des idéaux de A est un idéal de A .
- (2) L'image directe d'un idéal par un morphisme d'anneau surjective est un idéal.
- (3) Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

2.2 Idéaux flous dans un anneau

La notion d'un anneau flou et idéal flou a été introduit par **Mukherjee**[12]. Dans cette section, on va donner quelques définitions et exemples sur ces deux notions.

Définition 2.5. (Anneau flou)[12] Soit A un anneau et soit E un sous ensemble flou dans A . E est un anneau flou si pour tout $x, y \in A$, les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\mu_E(x - y) \geq \mu_E(x) \wedge \mu_E(y)$;
- (ii) $\mu_E(xy) \geq \mu_E(x) \wedge \mu_E(y)$.

Exemple 2.4. Soit l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. On considère l'ensemble flou A défini par :

$$\mu_A : \mathbb{Z} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \mu_A(x) = \begin{cases} 0.8 & \text{si } x=0; \\ 0.1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

A est un anneau flou dans $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Définition 2.6. (Idéal flou dans un anneau)[12] Soit A un anneau et soit I un sous ensemble flou dans A . I est un idéal flou si pour tout $x, y \in A$, les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y)$;
- (ii) $\mu_I(xy) \geq \mu_I(x) \vee \mu_I(y)$.

Exemple 2.5. Soit l'anneau $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$. On considère l'ensemble flou A défini par :

$$\mu_A : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \mu_A(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x=0; \\ 0.4 & \text{si } x=3 \text{ ou } x=6; \\ 0.1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A est un idéal flou dans $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$.

2.2.1 Propriétés des idéaux flous dans un anneau

Dans cette section, on va donner quelques propriétés de base sur les idéaux flous dans un anneau.

Proposition 2.1. Soient I, G deux idéaux flous dans l'anneau A . Alors $I \cap G$ est un idéal flou dans A .

Démonstration Soient I, G deux idéaux flous dans A . On démontre que $I \cap G$ est idéal flou dans l'anneau A , comme I et G sont deux idéaux flous, alors par définition on a

$$\begin{cases} \mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y); \\ \mu_I(xy) \geq \mu_I(x) \vee \mu_I(y). \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} \mu_G(x - y) \geq \mu_G(x) \wedge \mu_G(y); \\ \mu_G(xy) \geq \mu_G(x) \vee \mu_G(y). \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mu_{I \cap G}(x - y) &= \mu_I(x - y) \wedge \mu_G(x - y); \\ &\geq [\mu_I(x) \wedge \mu_I(y)] \wedge [\mu_G(x) \wedge \mu_G(y)]; \\ &\geq [\mu_I(x) \wedge \mu_G(x)] \wedge [\mu_I(y) \wedge \mu_G(y)]; \\ &\geq \mu_{I \cap G}(x) \wedge \mu_{I \cap G}(y). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mu_{I \cap G}(xy) &= \mu_I(xy) \wedge \mu_G(xy); \\
&\geq [\mu_I(x) \vee \mu_I(y)] \wedge [\mu_G(x) \vee \mu_G(y)]; \\
&\geq [\mu_I(x) \wedge \mu_G(x)] \vee [\mu_I(y) \wedge \mu_G(y)]; \\
&\geq \mu_{I \cap G}(x) \vee \mu_{I \cap G}(y).
\end{aligned}$$

D'où, $I \cap G$ est un idéal flou dans A .

On peut généraliser la **Proposition 2.1.** dans le cas des familles des idéaux.

Proposition 2.2. *Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille des idéaux flous dans l'anneau A . Alors $\cap_{i \in I} G_i$ est un idéal flou dans A .*

Remarque 2.4. *L'union de deux idéaux flous n'est pas un idéal flou en général.*

Maintenant, on démontre que l'image directe d'un idéal flou est un idéal flou.

Proposition 2.3. *Soient A, A' deux anneaux et $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme des anneaux, et soit I un idéal flou dans A . Alors, $f(I)$ est un idéal flou dans l'anneau A' .*

Démonstration Soit I un idéal flou dans l'anneau A . On démontre que $f(I)$ est un idéal flou dans A' , c-à-d

$$\begin{aligned}
f(I)(x - y) &\geq f(I)(x) \wedge f(I)(y); \\
f(I)(x \cdot y) &\geq f(I)(x) \vee f(I)(y).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
f(I)(x - y) &= \text{Sup}\{ I(z) \mid z \in f^{-1}(x - y) \}; \\
&= \text{Sup}\{ I(\alpha - \beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\
&\geq \text{Sup}\{ I(\alpha) \wedge I(\beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\
&\geq \text{Sup}\{ I(\alpha) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \} \wedge \text{Sup}\{ I(\beta) \mid \beta \in f^{-1}(y) \}; \\
&\geq f(I)(x) \wedge f(I)(y).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
f(I)(x.y) &= \text{Sup}\{ I(z) \mid z \in f^{-1}(x.y) \}; \\
&= \text{Sup}\{ I(\alpha.\beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\
&\geq \text{Sup}\{ I(\alpha) \vee I(\beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\
&\geq \text{Sup}\{ I(\alpha) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \} \vee \text{Sup}\{ I(\beta) \mid \beta \in f^{-1}(y) \}; \\
&\geq f(I)(x) \vee f(I)(y).
\end{aligned}$$

Donc, $f(I)$ est un idéal flou dans A' . Aussi, on démontre que l'image réciproque d'un idéal flou est un idéal flou.

Proposition 2.4. *Soient A, A' deux anneaux et $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme des anneaux, et soit I' un idéal flou dans A' . Alors, $f^{-1}(I')$ est un idéal flou dans l'anneau A .*

Démonstration Soit I' un idéal flou dans l'anneau A' . On démontre que $f^{-1}(I')$ est un idéal flou dans A , c-à-d

$$\begin{aligned}
f^{-1}(I')(x - y) &\geq f^{-1}(I')(x) \wedge f^{-1}(I')(y); \\
f^{-1}(I')(x.y) &\geq f^{-1}(I')(x) \vee f^{-1}(I')(y).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
f^{-1}(I')(x - y) &= \{ \langle x - y, f^{-1}(I')(x - y) \rangle, x - y \in A \}; \\
&\geq \{ \langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A \text{ et } \langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A \}; \\
&\geq \{ \langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A \} \wedge \{ \langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A \}; \\
&\geq f^{-1}(I')(x) \wedge f^{-1}(I')(y).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
f^{-1}(I')(x.y) &= \{ \langle x.y, f^{-1}(I')(x.y) \rangle, x.y \in A \}; \\
&\geq \{ \langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A \text{ ou } \langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A \}; \\
&\geq \{ \langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A \} \vee \{ \langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A \}; \\
&\geq f^{-1}(I')(x) \vee f^{-1}(I')(y).
\end{aligned}$$

Donc, $f^{-1}(I')$ est un idéal flou dans A .

2.2.2 Caractérisations des idéaux flous dans un anneau

Dans cette section, on donne quelques caractérisations des idéaux flous en terme de support et des α – coupes.

Proposition 2.5. *Soit I est un idéal flou dans un anneau A , alors $Supp(I)$ est idéal dans A .*

Démonstration Soit I un idéal flou dans l'anneau A . On démontre que $Supp(I)$ idéal dans A , alors

(1) Soient $x, y \in Supp(I)$. On démontre que $x - y \in Supp(I)$.

On a $x \in Supp(I)$ alors, $\mu_I(x) > 0$ et $y \in Supp(I)$ alors, $\mu_I(y) > 0$.

Comme I est un idéal flou dans A . Alors, $\mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y) > 0$.

Donc, $x - y \in Supp(I)$.

(2) Soient $x \in Supp(I)$ et $a \in A$. On démontre que $x.a \in Supp(I)$ et $a.x \in Supp(I)$.

On a $x \in Supp(I)$ alors, $\mu_I(x) > 0$ et soit $a \in A$.

Comme I est un idéal flou dans A . Alors, $\mu_I(x.a) \geq \mu_I(x) \vee \mu_I(a) > 0$.

Donc, $x.a \in Supp(I)$. De même manière on démontre que $a.x \in Supp(I)$.

D'où, $Supp(I)$ est un idéal dans A .

Théorème 2.1. *Soient A un anneau, et I un sous-ensemble flou dans A . Alors, I est un idéal flou dans A si et seulement si I_α sont des idéaux classiques dans A pour tout $\alpha \in [0, 1]$.*

Démonstration

\implies) On suppose que I est un idéal flou et on démontre que I_α sont des idéaux classiques dans A pour tout $\alpha \in [0, 1]$:

(i) Soient $x, y \in I_\alpha$, donc $\mu_I(x) \geq \alpha$ et $\mu_I(y) \geq \alpha$.

Comme I est un idéal flou dans A , alors $\mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y) \geq \alpha$.

Donc, $x - y \in I_\alpha$.

(ii) Soient $x \in I_\alpha$ et $a \in A$, alors $\mu_I(x) \geq \alpha$ et $a \in A$. Comme I est un idéal flou dans A , alors $\mu_I(x.a) \geq \mu_I(x) \vee \mu_I(a) \geq \alpha$.

Donc, $x.a \in I_\alpha$. De même manière on démontre que $a.x \in I_\alpha$.

D'où, I_α sont des idéaux dans A .

\impliedby) On suppose que I_α sont des idéaux classiques dans A pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et on démontre

que I est un idéal flou dans A .

Soient $x, y \in A$ avec $\alpha = \mu_I(x) \wedge \mu_I(y)$ ceci implique que $\mu_I(x) \geq \alpha$ et $\mu_I(y) \geq \alpha$.

Le cas $\alpha = 0$ est trivial. Autrement, soit $\alpha \in]0, 1]$ et $x, y \in I_\alpha$.

Comme I_α sont des idéaux classiques dans A , donc $x - y \in I_\alpha$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ et ceci donne $\mu_I(x - y) \geq \alpha$. Donc, $\mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y)$. De même, on démontre que $\mu_I(x \cdot y) \geq \mu_I(x) \vee \mu_I(y)$.

D'où, I est un idéal flou dans A .

2.3 Idéal premier flou dans un anneau : Définitions

La notion d'un idéal premier flou a été introduit par **Swamy**[14]. Dans cette section, on va donner quelques définitions et exemples d'un idéal premier flou dans un anneau classique.

Définition 2.7. [14] *Soit A un anneau et soit I un sous ensemble flou de A .*

I est un idéal premier flou si pour tout $x, y \in A$, les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(i) \quad \mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y);$$

$$(ii) \quad \mu_I(xy) = \mu_I(x) \vee \mu_I(y).$$

Exemple 2.6. *Soit $A = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ un anneau et soit I un sous ensemble flou dans A définie par :*

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 5 \mid x; \\ 0.2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors I est un idéal premier flou dans \mathbb{Z} .

2.3.1 Propriétés des idéaux premiers flous dans un anneau

Dans cette section, on va donner quelques propriétés de base sur les idéaux premiers flous dans un anneau.

Proposition 2.6. *Soient I, G deux idéaux premiers flous dans l'anneau A . Alors $I \cap G$ est un idéal premier flou dans A .*

Démonstration Comme I, G sont des idéaux premiers flous dans A . On démontre que $I \cap G$ est idéal premier flou dans l'anneau A , alors

$$\begin{cases} \mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y); \\ \mu_I(xy) = \mu_I(x) \vee \mu_I(y). \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} \mu_G(x - y) \geq \mu_G(x) \wedge \mu_G(y); \\ \mu_G(xy) = \mu_G(x) \vee \mu_G(y). \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mu_{I \cap G}(x - y) &= \mu_I(x - y) \wedge \mu_G(x - y); \\ &\geq [\mu_I(x) \wedge \mu_I(y)] \wedge [\mu_G(x) \wedge \mu_G(y)]; \\ &\geq [\mu_I(x) \wedge \mu_G(x)] \wedge [\mu_I(y) \wedge \mu_G(y)]; \\ &\geq \mu_{I \cap G}(x) \wedge \mu_{I \cap G}(y). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \mu_{I \cap G}(xy) &= \mu_I(xy) \wedge \mu_G(xy); \\ &= [\mu_I(x) \vee \mu_I(y)] \wedge [\mu_G(x) \vee \mu_G(y)]; \\ &= [\mu_I(x) \wedge \mu_G(x)] \vee [\mu_I(y) \wedge \mu_G(y)]; \\ &= \mu_{I \cap G}(x) \vee \mu_{I \cap G}(y). \end{aligned}$$

D'où, $I \cap G$ est un idéal premier flou dans A .

On peut généraliser la **Proposition 2.6.** dans le cas des familles des idéaux.

Proposition 2.7. Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille des idéaux premiers flous dans l'anneau A . Alors $\cap_{i \in I} G_i$ est un idéal premier flou dans A .

Remarque 2.5. L'union de deux idéaux premiers flous n'est pas un idéal premier flou en général.

Proposition 2.8. Soient A, A' deux anneaux et $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme des anneaux, et soit I un idéal premier flou dans A . Alors, $f(I)$ est un idéal premier flou dans l'anneau A' .

Démonstration Soit I un idéal premier flou dans l'anneau A . On démontre que :

$$\begin{aligned} f(I)(x - y) &\geq f(I)(x) \wedge f(I)(y); \\ f(I)(xy) &= f(I)(x) \vee f(I)(y). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f(I)(x - y) &= \text{Sup}\{ I(z) \mid z \in f^{-1}(x - y) \}; \\ &= \text{Sup}\{ I(\alpha - \beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\ &\geq \text{Sup}\{ I(\alpha) \wedge I(\beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\ &\geq \text{Sup}\{ I(\alpha) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \} \wedge \text{Sup}\{ I(\beta) \mid \beta \in f^{-1}(y) \}; \\ &\geq f(I)(x) \wedge f(I)(y). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f(I)(x.y) &= \text{Sup}\{ I(z) \mid z \in f^{-1}(x.y) \}; \\ &= \text{Sup}\{ I(\alpha.\beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\ &= \text{Sup}\{ I(\alpha) \vee I(\beta) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \text{ et } \beta \in f^{-1}(y) \}; \\ &= \text{Sup}\{ I(\alpha) \mid \alpha \in f^{-1}(x) \} \vee \text{Sup}\{ I(\beta) \mid \beta \in f^{-1}(y) \}; \\ &= f(I)(x) \vee f(I)(y). \end{aligned}$$

Donc, $f(I)$ est un idéal premier flou dans A' .

Proposition 2.9. *Soient A, A' deux anneaux et $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme des anneaux, et soit I' un idéal premier flou dans A' . Alors, $f^{-1}(I')$ est un idéal premier flou dans l'anneau A .*

Démonstration Soit I' un idéal premier flou dans l'anneau A' . On démontre que :

$$\begin{aligned} f^{-1}(I')(x - y) &\geq f^{-1}(I')(x) \wedge f^{-1}(I')(y); \\ f^{-1}(I')(x.y) &= f^{-1}(I')(x) \vee f^{-1}(I')(y). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(I')(x - y) &= \{ \langle x - y, f^{-1}(I')(x - y) \rangle, x - y \in A \}; \\ &\geq \{ \langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A \text{ et } \langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A \}; \\ &\geq \{ \langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A \} \wedge \{ \langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A \}; \\ &\geq f^{-1}(I')(x) \wedge f^{-1}(I')(y). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
f^{-1}(I')(x.y) &= \{\langle x.y, f^{-1}(I')(x-y) \rangle, x.y \in A\}; \\
&= \{\langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A \text{ ou } \langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A\}; \\
&= \{\langle x, f^{-1}(I')(x) \rangle, x \in A\} \vee \{\langle y, f^{-1}(I')(y) \rangle, y \in A\}; \\
&= f^{-1}(I')(x) \vee f^{-1}(I')(y).
\end{aligned}$$

Donc, $f^{-1}(I')$ est un idéal premier flou dans A .

2.3.2 Caractérisations des idéaux premiers flous dans un anneau

Dans cette section, on va donner quelques caractérisations des idéaux premiers flous dans un anneau.

Proposition 2.10. [8] *Soit I est un idéal premier flou dans un anneau A , alors $Supp(I)$ est idéal premier dans A .*

Démonstration Soit I un idéal premier flou dans l'anneau A . On démontre que $Supp(I)$ idéal premier dans A , alors

(1) Soient $x, y \in Supp(I)$. On démontre que $x - y \in Supp(I)$.

On a $x \in Supp(I)$ alors, $\mu_I(x) > 0$ et $y \in Supp(I)$ alors, $\mu_I(y) > 0$.

Comme I est un idéal premier flou dans A . Alors, $\mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y) > 0$.

Donc, $x - y \in Supp(I)$.

(2) Soient $x \in Supp(I)$ et $a \in A$. On démontre que $x.a \in Supp(I)$ et $a.x \in Supp(I)$.

On a $x \in Supp(I)$, alors $\mu_I(x) > 0$ et soit $a \in A$.

Comme I est un idéal premier flou dans A . Alors, $\mu_I(x.a) = \mu_I(x) \vee \mu_I(a) > 0$.

Donc, $x.a \in Supp(I)$. De même manière on démontre que $a.x \in Supp(I)$.

D'où, $Supp(I)$ est un idéal premier dans A .

Théorème 2.2. *Soient A un anneau, et I un sous-ensemble flou dans A . Alors, I est un idéal premier flou dans A si et seulement si I_α sont des idéaux premiers dans A pour tout $\alpha \in [0, 1]$.*

Démonstration

\implies) On suppose que I est un idéal premier flou et on démontre que I_α sont des idéaux premiers classiques dans A pour tout $\alpha \in [0, 1]$:

(i) Soient $x, y \in I_\alpha$, donc $\mu_I(x) \geq \alpha$ et $\mu_I(y) \geq \alpha$.

Comme I est un idéal premier flou dans A , alors $\mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y) \geq \alpha$.

Donc, $x - y \in I_\alpha$.

(ii) Soient $x \in I_\alpha$ et $a \in A$, alors $\mu_I(x) \geq \alpha$ et $a \in A$. Comme I est un idéal premier flou dans A , alors $\mu_I(x.a) = \mu_I(x) \vee \mu_I(a) \geq \alpha$.

Donc, $x.a \in I_\alpha$. De même manière on démontre que $a.x \in I_\alpha$.

D'où, I_α sont des idéaux premiers dans A .

\Leftarrow) On suppose que I_α sont des idéaux premiers classiques dans A pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et on démontre que I est un idéal premier flou dans A .

Soient $x, y \in A$ avec $\alpha = \mu_I(x) \wedge \mu_I(y)$ ceci implique que $\mu_I(x) \geq \alpha$ et $\mu_I(y) \geq \alpha$.

Le cas $\alpha = 0$ est trivial. Autrement, soit $\alpha \in]0, 1]$ et $x, y \in I_\alpha$.

Comme I_α sont des idéaux premiers classiques dans A , donc $x - y \in I_\alpha$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ et ceci donne $\mu_I(x - y) \geq \alpha$. Donc, $\mu_I(x - y) \geq \mu_I(x) \wedge \mu_I(y)$. De même, on démontre que $\mu_I(x.y) = \mu_I(x) \vee \mu_I(y)$.

D'où, I est un idéal premier flou dans A .

Conclusion Général

Dans ce mémoire, nous avons étudié les notions de base d'un idéal flou dans un anneau, et on a vu quelques propriétés de bases pour cette notion comme la stabilité pour l'intersection des idéaux flous, l'image directe et l'image réciproque. Aussi, on a vu quelques caractérisations des idéaux flous dans un anneau en terme de support et en terme de ses α -coupes. Finalement, nous avons traité la notion d'un idéal premier flou comme un type particulière de l'idéal flou dans un anneau.

Ce travail donne la possibilité de généraliser quelques résultats classiques notamment les différents types des idéaux flous dans un anneau.

Comme perspectives, on a laissé la voie ouverte pour envisager d'autres propriétés et caractéristiques des types particulières des idéaux flous dans un anneau notamment l'idéal flou principal, l'idéal flou maximal et les relations entre eux.

Bibliographie

- [1] M.Z. Alam, Fuzzy rings and anti fuzzy rings with operators, *Journal of Mathematicas*, 11, 48-54 (2015).
- [2] F.A. Azam, A.A. Mamun et F. Nasrin, Anti fuzzy ideal of a rings, *Mathematicas and Informatics*, 5(2), 349-360 (2013).
- [3] I. Bakhadach, S. Melliani, M. Oukessou et L.S. Chadli, Intuitionistic fuzzy ideal and intuitionistic fuzzy prime ideal in a ring, *Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique*, 22(2), 59-63 (2016).
- [4] J. Comp, On fuzzy ideals and rings, *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, 3(1), 115-130 (2012).
- [5] J.A. Goguen, L-fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18, 145-174 (1967).
- [6] F.J. Lobillo, O. Cortadellas et G. Navarro, Prime fuzzy ideals over noncommutative rings, *Fuzzy Sets and Systems*, 199, 108-120 (2012).
- [7] G.K. Lubwele, Théorie des ensembles flous caractérisation, propriétés et opérations, *Lareq One Pager*, 11(1), 37-45 (2016).
- [8] D.S. Malik et J.N. Mordeson, Fuzzy prime of a ring, *Fuzzy Sets and Systems*, 37(1), 93-98 (1990).
- [9] B.Bouchon-Meunier, *La logique floue*, PUF collection «Que sais-je ? », Paris, 1993.
- [10] B.Bouchon-Meunier, *La logique floue et ses application*, Addison Wesley, Paris, 1995.
- [11] N. Moussai, Mémoire de Master, Étude sur les ensembles ordonnés flous, Université de M'sila, 2018.
- [12] T.K. Mukherjee et M.K. Sen, On fuzzy ideal of a ring, *Fuzzy Sets and Systems*, 21, 99-105 (1987).

- [13] T. Shah et M. Saeed, On fuzzy ideals in rings and anti-homomorphism, International Mathematical Forum, 7(16), 753-759 (2012).
- [14] U.M. Swamy et K.L.N. Swamy, Fuzzy prime ideal of rings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 134, 94-103 (1998).
- [15] J.L. Wang, Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems, 11, 31-41 (1983).
- [16] C.K. Wong, Fuzzy points and local properties of fuzzy topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 46, 316-328 (1974).
- [17] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353 (1965).
- [18] L.A. Zadeh, Similarity relation and fuzzy orderings, Informtion Sciences, 3, 177-200 (1971).
- [19] H.J. Zimmermaan, Fuzzy sets theory and its application, 4th Rev, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.